

Consideraciones sobre la relación entre el Arte figurativo y la Matemática¹

Bruno D'Amore² Martha Isabel Fandiño Pinilla³

Resumen

En este texto, proponemos varias consideraciones que, a nuestro juicio, proporcionan diversos vínculos, algunos de estos inesperados, entre la Matemática y el arte figurativo, con el fin de proporcionar material para la reflexión cultural general y sugerir hipótesis de trabajo en las clases de Matemática escolar.

Palabras clave: singularidad, geometría multidimensional, semiótica.

Various considerations in the relationship between figurative Art and Mathematics

Abstract

In this paper, we propose various considerations that, in our view, provide various links, some of them unexpected, between mathematics and figurative art, with the aim of providing material for general cultural reflection and suggesting working hypotheses in school mathematics lessons.

Keywords: singularity, multi-dimensional geometry, semiotics.

SINGULARIDAD

El término “singularidad” en Matemática indica algo, ya sea un objeto o una situación que, en comparación con otros análogos en el contexto, tiene un papel particular, y que se desvía, por alguna razón, de la “normalidad” o de una “regularidad” imperante o esperada. En muchos campos de la Matemática, hay situaciones u objetos para los cuales se puede hablar de singularidad y las interpretaciones que se dan de estos en los distintos contextos específicos también pueden ser muy diferentes.

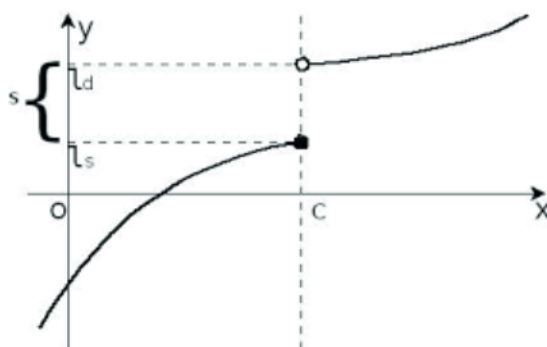
En Análisis, por ejemplo, se habla de singularidades cuando hay puntos de discontinuidad; para aclarar: supongamos que tenemos una función f con valores reales; supongamos que, en un cierto punto P (de abscisa x_0) del dominio de f , la propia f no es continua. En este caso, P se denomina “punto de discontinuidad de f ”.

Como sinónimo, muchos autores dicen que P es una singularidad (pueden distinguirse varios casos de singularidad).

¹ Este artículo es una traducción, realizada por los propios autores, del original en italiano: D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2023). *Varie considerazioni nei rapporti fra Arte figurativa e Matematica*. *Linea Matematica*, 2023(2), 1-11. Disponible en: <https://www.lineamatematica.it/index.php/LineaMatematica/article/view/26/57>

² Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia, NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia, Academia de las Ciencias de Bologna, Italia Correo electrónico: bruno.damore@unibo.it

³ NRD, Departamento de Matemática, Universidad de Bologna, Italia. Correo electrónico: marisafp@hotmail.it



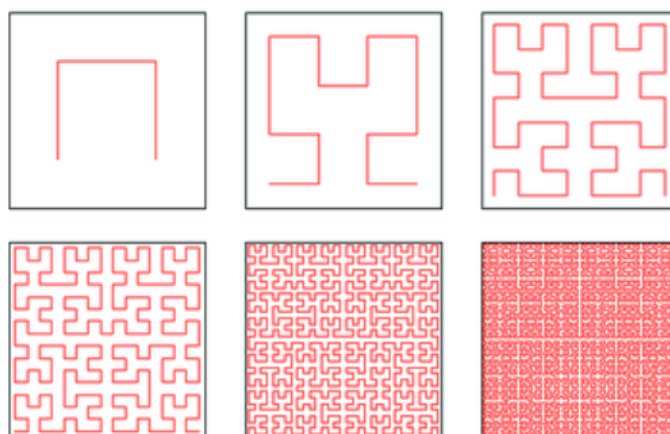
En otros ámbitos, por ejemplo, en el Análisis Complejo, seguimos hablando de singularidad, con significados mucho más específicos.

En Álgebra lineal, se reserva el nombre de matriz singular para una matriz cuadrada cuyo determinante es cero o cuyo rango no es el máximo; lo cual implica que las matrices singulares no son invertibles, es decir no existe para estas una matriz tal que su producto sea la matriz identidad.

En Geometría algebraica, los puntos singulares son aquellos puntos de una variedad dada, por ejemplo, una curva, que tienen un comportamiento especial, distinto de los demás puntos de la misma curva.

En una versión más popularizada, “singular” suele significar un objeto matemático o una situación matemática en la cual ocurre algo que parece escapar a la lógica esperada.

Por ejemplo, a finales del siglo XIX, el matemático italiano Giuseppe Peano (1858 - 1932) mostró a los ojos incrédulos del mundo académico una curva construida por generalizaciones sucesivas que posee una característica que tiene algo de imposible. En su caso, se trataba de la definición de una curva (por tanto, un objeto unidimensional) que tiene la propiedad de recubrir un cuadrado (por tanto, un objeto bidimensional) de forma adecuada y sin excepciones.



Una sucesión de pasos en la construcción de la curva de Peano

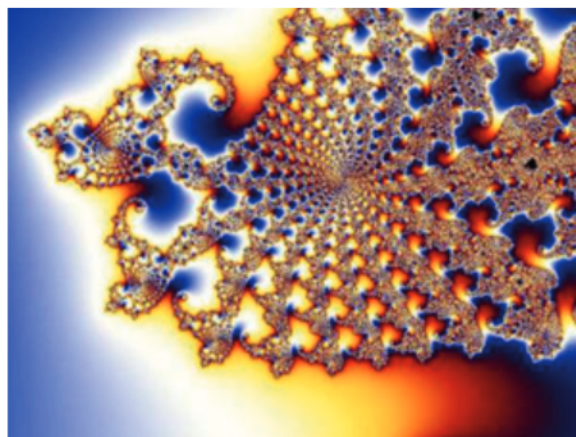
Ahora bien, esta situación es paradójica si se considera desde un punto de vista estrictamente geométrico: una curva (dimensión 1) no puede recubrir un cuadrado (dimensión 2). Sin embargo, precisamente la particularidad arididad de la construcción iterativa propuesta por Peano lo permite.

El objeto matemático en cuestión y la situación producida son tan inesperadamente geniales (singulares) que artistas de diversos intereses han querido rendir homenaje a Peano.



Dario Ghibaudo, Curva di Peano, 1998, Cuneo.

Muchos también consideran que los fractales son singularidades, es decir aquellos objetos que pertenecen al campo de la Geometría y que se replican a sí mismos en diferentes escalas, estando dotados de homotecia interna. Algunos lo llaman *autosimilaridad*. El término inicial es de Benoît Mandelbrot (1924 - 2010), de mediados de los años setenta. Son objetos geométricos singulares muy populares también en el mundo del Arte figurativo.



Ejemplo de fractal.

El mundo de las singularidades, en todos los ámbitos del conocimiento humano, constituye una fascinación discreta y sutil porque, al despojar a la “normalidad” de un dominio existencial, obliga al estudioso, al valiente explorador de mundos insólitos, a perseguir (y a realizar) sueños, fantasías, armonías sutiles y arcanas que se apartan de la repetición obsesiva y normal.

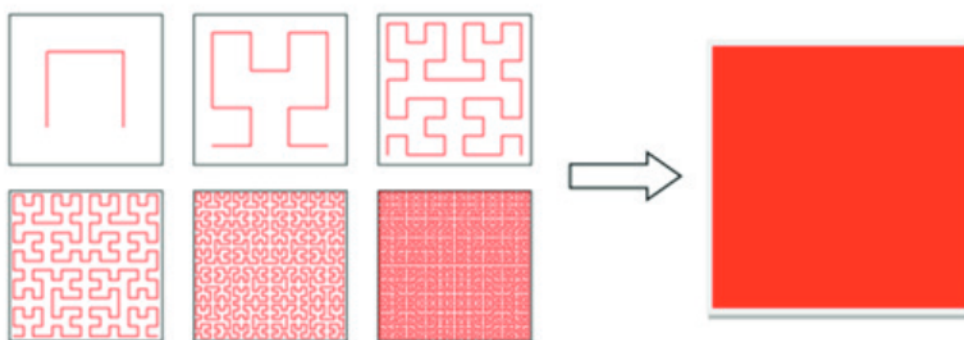
Pasando a otro ámbito, recordemos que el gran artista ruso Kazimir Malevich (1879 - 1935) expuso su obra más famosa (*Cuadrado negro*) en la Galería Tretyakov de Moscú en 1915, con motivo de la *Última Exposición Futurista*. Se trataba de un óleo sobre lino de 79,5×79,5 cm. Dado su enorme éxito internacional, realizó posteriormente (¡y con cierta facilidad!) cuatro variaciones de la misma a finales de los años veinte y principios de los treinta.

En nuestra opinión, la obra fue tan revolucionaria como la de Peano... Y, en cierto modo, relativamente parecida, al menos en su aspecto final...



Kazimir Malevich, Cuadrado negro, primera versión: 1915.

Y, en efecto, es imposible resistirse al encanto de la analogía figural...



Giuseppe Peano, Curva de Peano, iteración. Hacia 1890.

MÁS DIMENSIONES

Hablando de dimensiones, en Geometría, es bien sabido que las reflexiones teóricas conducen al estudio teórico de espacios con más de 3 dimensiones.

Pero no hay que creer que este hecho es exclusivo de la Matemática.

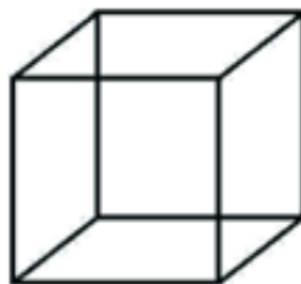


Salvador Dalí (1904 - 1989), *Crucifixión, cuerpo hipercúbico*, 1954, aceite sobre lienzo, 58,4 x 73,7 cm, Metropolitan Museum of Art. New York.

En la obra de Salvador Dalí de 1954 *Crucifixión, cuerpo hipercúbico*, aparece una cruz de gran sugestión matemática, compuesta por cubos, lo cual es absolutamente correcto a nivel epistemológico; pero el observador no suele darse cuenta de la profunda sabiduría matemática que esconde este cuadro.

Parece oportuno dar los detalles matemáticos, muy sencillos, de esta creación, para testimoniar la pericia matemática del genial pintor.

Empecemos observando, por lo menos mentalmente, un cubo, objeto matemático tridimensional (3D).



Representación bidimensional en perspectiva de un cubo.

Sus seis caras son cuadrados, objetos matemáticos en dos dimensiones (2D).

Nada nos impide pensar en proyectar el cubo perpendicularmente sobre uno de los planos que pasan por una de sus caras. Tal proyección da lugar a un cuadrado.



Representación bidimensional de un cubo proyectado perpendicularmente sobre el plano de una de sus caras.

Sus cuatro lados son segmentos, objetos matemáticos unidimensionales (1D).

Nada nos impide pensar en proyectar el cuadrado perpendicularmente sobre una de las rectas que pasan por uno de sus lados. Tal proyección da como resultado un segmento.



Representación unidimensional de un cuadrado proyectado perpendicularmente sobre la línea de uno de sus lados.

Sus dos vértices son puntos, objetos matemáticos de dimensión cero (0D).

Nada nos impide pensar en proyectar el segmento sobre uno de sus vértices.

Tal proyección da lugar a un punto, que indicaremos aquí con una mancha de tinta.



Punto.

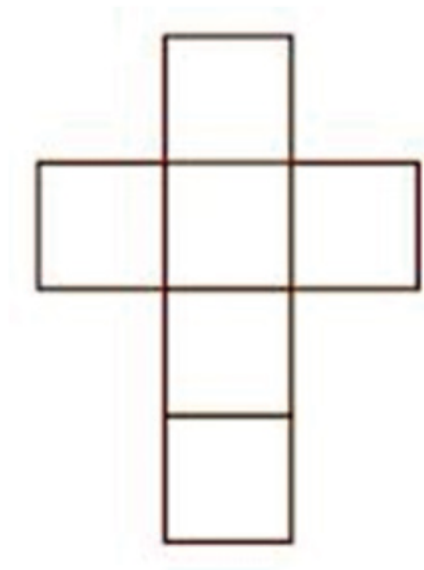
Entonces, el punto puede considerarse como una representación del cubo en un espacio de dimensión 0, el segmento como una representación del cubo en un espacio de dimensión 1, el cuadrado en un espacio de dimensión 2.

Pero, ¿quién nos impide invertir y generalizar el razonamiento a los espacios de dimensión 4? Del mismo modo que el cuadrado es una representación en 2D de un cubo, el cubo puede considerarse como la proyección en 3D de un hipercubo en un espacio de 4D: imposible siquiera intentar representarlo.

Sin embargo...

Si queremos pasar de un cuadrado 2D a un cubo 3D, podemos operar de la siguiente manera:

Dibujamos el cuadrado, para después dibujar en cada uno de sus lados un cuadrado igual (y llegamos a 5 cuadrados iguales); y luego dibujamos otro cuadrado, igual a los anteriores, adyacente a uno de los cuadrados exteriores y llegamos a 6 cuadrados iguales dispuestos de la siguiente manera.



Cinco casillas dispuestas alrededor de una dada, todas iguales entre sí.

Ahora se puede doblar la figura, como puede verse fácilmente, para obtener el cubo inicial.

El mismo procedimiento se puede obtener a partir del segmento (1D) para obtener un cuadrado que tenga como lado este segmento.

Dibujamos el segmento, en los extremos dibujamos un segmento igual; y añadimos otro segmento igual a los anteriores en el extremo de uno de los segmentos externos.



Cuatro segmentos dispuestos alrededor de uno dado, todos iguales entre sí.

Ahora es fácil “doblar” la figura para recuperar el cuadrado inicial.

Lo mismo es posible partiendo del punto (0D); habría que colocar puntos a sus extremos, pero el punto, al tener dimensión cero, no tiene extremos; así que simplemente imaginamos otro punto además del punto de partida; tenemos por tanto 2 puntos que constituyen un segmento.

La fórmula que se está creando se compone, por tanto, de la siguiente manera:

el objeto matemático inicial (1) + tantos objetos iguales cuantas son sus aristas + otro objeto idéntico al inicial;

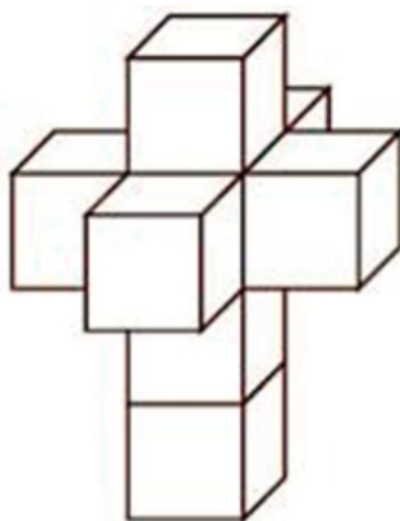
en el caso del punto: $1+0+1=2$ (resultado: segmento, formado por 2 puntos)

en el caso del segmento: $1+2+1=4$ (resultado: cuadrado, formado por 4 lados - segmentos)

en el caso del cuadrado: $1+4+1=6$ (resultado: cubo, formado por 6 caras - cuadrados).

Si ahora queremos pasar al caso 4D, es decir al hipercubo, podemos suponer una situación aritmética del mismo tipo: $1+6+1$, es decir:

el cubo inicial + 6 cubos idénticos unidos a las 6 caras del cubo + 1 cubo unido a una cara de un cubo exterior.



Ocho cubos dispuestos alrededor de uno de ellos, todos iguales.

Esta imagen, pues, representaría, proyectada en 3D, un hipercubo 4D; pero como la lámina que lo alberga es 2D, lo que podemos ver aquí no es más que la representación 2D de la representación 3D del hipercubo 4D.

Si ahora volvemos atrás y admiramos la obra de Salvador Dalí *Crucifixión, un cuerpo hipercúbico*, el asombro ya no sólo puede estar relacionado con la cuestión artística, sino también con la habilidad y pericia matemática oculta, no resaltada, puesta en el título de la obra, que se dan por supuestas en el intérprete y en el admirador...

| LA “FORMA” EN LA CIENCIA Y LA POESÍA

Nos gusta proponer aquí algunas consideraciones sobre la idea de forma, aportadas por matemáticos y otras personas.

¿Qué es la forma?

- René Thom (1923 - 2002): una discontinuidad cualitativa sobre un sustrato continuo.
- Giuseppe Di Napoli: una abstracción flotante entre la idea y la materia.

Y sobre la relación entre ciencia y poesía:

Leonardo Sinisgalli (1908 - 1981): «La ciencia y la técnica nos ofrecen cada día nuevos ideogramas, nuevos símbolos, ante los cuales no podemos permanecer extraños o indiferentes, sin riesgo de una momificación o una fosilización total de nuestra conciencia y de nuestra vida (...). La ciencia y la poesía no pueden caminar por senderos divergentes. Los poetas no deben tener miedo de la contaminación. Lucrecio, Dante y Goethe se nutrieron abundantemente de la cultura científica y filosófica de su época sin enturbiar su vena. Piero della Francesca, Leonardo y Durero, Cardano, Della Porta y Galilei siempre se han beneficiado de una fructífera simbiosis entre lógica y fantasía».

| SEMIÓTICA

Otro vínculo formidable entre el Arte figurativo y la Matemática tiene que ver con los problemas relacionados con la Semiótica. En el Arte figurativo es obvio que éstos están omnipresentes, pero no todo el mundo los reconoce en la Matemática. Esta es una de las cuestiones que los recientes estudios en Educación matemática han planteado y que ahora son evidentes.

Cuando se habla de teoría del significado, el pensamiento se dirige rápidamente a la Psicología, la Semiótica, la Lingüística o la Matemática. Pero no hay que pensar que este tipo de problema sólo concierne a estos ámbitos de investigación y análisis. Toda disciplina que se precie y que quiera lanzar una reflexión sobre los objetos de su propio conocimiento y su propia representación específica se ve obligada, tarde o temprano, a entrar en el fondo de la cuestión. Tanto más si se sirve de representaciones de sentido (locución que, por el

momento, utilizamos ingenuamente), como está obligada a hacerlo la Matemática (Duval, 1993; D'Amore, 2000, 2001a, b, c, 2003a).

En Matemática, en efecto, debido a que los “objetos” evocados no tienen naturaleza real (en un realismo ingenuo de carácter concreto), no se puede hacer otra cosa que recurrir a representaciones de los mismos dentro de una Semiótica apropiada; de modo que el matemático, mientras cita y habla de objetos en el dominio de la Matemática, en realidad elige, manipula y transforma sus representaciones (concretas) en registros semióticos.

Un caso totalmente análogo al de la Matemática, quizá inesperado para la mayoría, es sin duda el Arte figurativo. Aunque no queramos complicar el asunto y asumamos, de manera decididamente acrítica e históricamente desfasada, que el Arte es el estudio de las interpretaciones de representaciones figurales problemáticas de objetos y fenómenos de la naturaleza, incluida obviamente la naturaleza humana, parece bastante claro que toda representación del mundo figural alude a un objeto o fenómeno, pero es distinta de estos. Todo producto artístico es, en definitiva, él mismo un objeto o un fenómeno de la naturaleza.

Así, la obra del genial pintor surrealista belga René Magritte (1898 - 1967), quien reflexionaba sobre la naturaleza del lenguaje del Arte y sobre el sentido de la relación entre significado y representación, se reveló inmediatamente necesaria y reveladora. Estas reflexiones constituyeron a menudo verdaderas obras de Arte, como la famosa *Ceci n'est pas une pipe* (*Esta no es una pipa*), que Magritte creó en varias versiones entre 1929 y 1946.



René Magritte, *Ceci n'est pas une pipe*, varias versiones entre 1929 y 1946.

Más allá del bochorno que creó cuando fue expuesta, vista con los ojos críticos y agudos de hoy, el sentido de esta obra, deliberadamente popular, es bastante evidente: lo que el observador tiene ante sí NO es una pipa, en realidad, sino una representación que alude a una pipa; lo que se ve, en definitiva, es una representación, una alusión, una evocación, no el objeto en sí.

A veces, por el contrario, a Magritte le gustaba elaborar verdaderos estudios teóricos, como el igualmente célebre *Les mots et les images* (*Las palabras y las imágenes*) (1929) que, aunque era, como decíamos, un estudio teórico, también fue expuesto como obra.

Al interior de este estudio, quizá el detalle más famoso y discutido sea la imagen del caballo, cuya evidencia es total. Aparece un caballo, una representación pictórica del mismo, una enunciación verbal del mismo (en el registro semiótico “lenguaje oral”). No hay que olvidar, sin embargo, que el caballo que aparece a la izquierda del boceto es, a su vez, un dibujo.



René Magritte, *Les mots et les images*, 1929. Particular.

Este análisis del lenguaje pictórico nos obliga a evocar la obra del lógico matemático alemán Gottlob Frege (1848 - 1925). Junto con otras obras inmortales, Frege escribió un artículo sobre la naturaleza y el significado de la Matemática y su lenguaje: *Über Sinn und Bedeutung* (*Sentido y denotación*, publicado en 1891); fue una auténtica revolución en el mundo de la reflexión matemática y contribuyó a allanar el camino para ese período de replanteamiento crítico que lleva el nombre de *Crisis de los Fundamentos* replanteamiento que condujo a la forma actual de concebir la Matemática (D'Amore & Matteuzzi, 1975).

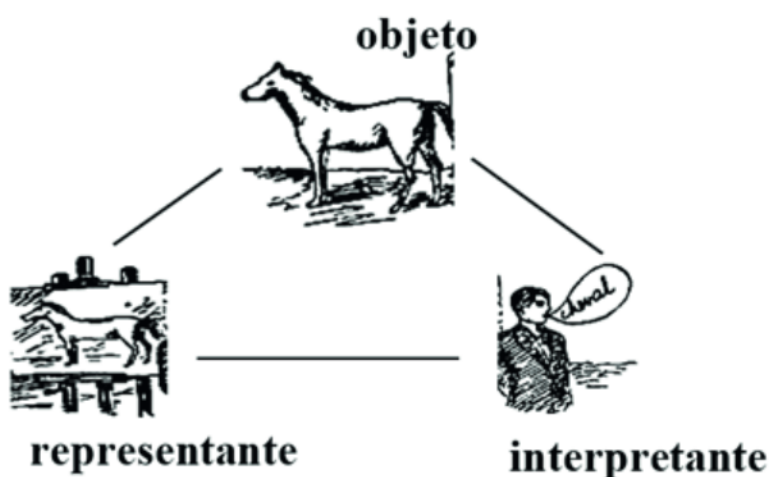
En ese artículo, que más tarde fue ocasión de una larga polémica con Giuseppe Peano, Frege propuso claramente una distinción entre “concepto” y “objeto” según la cual, el primero es una expresión que no denota en modalidad científica teniendo sólo características funcionales; y el segundo desempeña el papel de argumento. Por ejemplo, un número se identifica con el objeto denotado por un concepto, es decir, con la extensión de ese concepto.

En su otra obra famosa, *Die Grundlagen der Arithmetik - Eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl* (*Los fundamentos de la aritmética - Una investigación lógico-matemática sobre el concepto de número*), publicada en Wroclaw en 1884, Frege afirma en la p. 59: «La atribución de un número contiene siempre una afirmación sobre un

concepto. Esto es especialmente claro en el caso del número 0. Cuando se dice “El planeta Venus tiene 0 satélites”, en realidad no hay ningún satélite o conjunto de satélites en torno al cual se pueda afirmar algo. En cambio, es al concepto “satélite de Venus” que la afirmación anterior atribuye una propiedad (a saber, la de no comprender ningún objeto bajo él)».

Esta posición, que no dudamos en contar entre las hoy llamadas posiciones “realistas”, tuvo mucho éxito hasta los años setenta, pero actualmente está en crisis en favor de las posiciones “pragmatistas” (D’Amore, 2001a, c; D’Amore & Fandiño Pinilla, 2001).

Ya en 1883, por lo tanto *antes* que Frege, el matemático, físico y filósofo estadounidense Charles Sanders Peirce (1839 - 1914) había comenzado a utilizar esquemas elaborados para estudiar las relaciones entre los objetos y sus representaciones. Utilizaremos aquí la tríada muy simple: intérprete - representante - objeto, muy común entre los semióticos. Nos parece interesante encontrar una descripción de la reflexión de Magritte según un esquema semiótico⁴.



Un esquema semiótico triangular clásico aplicado a la obra de Magritte. Particular.

Pero quien quiere, puede crear su propia interpretación ternaria del “caballo” de Magritte, utilizando el triángulo de

- Gottlob Frege: Sinn (sentido) - Zeichen (expresión) - Bedeutung (denotación), publicado en 1892, como ya hemos mencionado,

o las más recientes de

- Charles Kay Ogden (1889 - 1957), Ivor Armstrong Richards (1893 - 1979): referencia - símbolo - referente (publicado en 1923).

⁴ Para una visión moderna de la Semiótica, especialmente en su versión matemática de uso escolar, véase: D’Amore, Fandiño Pinilla, Iori, 2013, cuyo primer capítulo es un excursus histórico desde los orígenes de la Semiótica hasta nuestros días.

Deteniéndonos un momento más en el mundo del Arte Figurativo, hacemos nuestra la tesis sostenida por el gran historiador del Arte Filiberto Menna (1926 - 1988) (1975), para quien la línea analítica del Arte moderno tuvo en los estudios y reflexiones de Magritte un gran creador. «(...) Magritte propone una desconexión entre imagen y palabra, entre definición visual (la imagen de la pipa) y definición verbal (la afirmación “Ceci n'est pas une pipe”), desautorizando el papel asertivo tradicionalmente atribuido al cuadro en virtud de la presencia (implícita o explícita) de un comentario a pie de página (...). Del arte, nos dice, y del cuadro en particular, no es posible predicar lo verdadero y lo falso, y para demostrar este supuesto aborda la cuestión desde los fundamentos gnoseológicos establecidos por las leyes de la teoría de la identidad (...)» (Menna, 1975, pp. 58-59).

La idea de Magritte ha tenido un largo seguimiento (aún no extinguido) entre los artistas de todo el mundo, especialmente entre quienes, en los años 60-80, fueron los creadores de la corriente llamada “conceptual científico”, entre los que sólo mencionamos al estadounidense Joseph Kosuth, citando dos de sus obras más famosas: *Neon Electrical Light English Glass Letters White Eight* (1965) y *Three Chairs* (1965).

El contenido de la primera obra es el descrito en el título, en el sentido exacto de esta frase. Es decir, se trata de una referencia autonima [es decir, cuyo “sentido” es la referencia a sí misma, como ocurre con la mayoría de los signos en Matemática].

La segunda obra consiste en un objeto (una silla), la imagen de esa silla y la definición de “silla” extraída de un diccionario; no puede sino evocar una síntesis de las obras de Magritte y Frege al mismo tiempo. ¿Se trata (de la representación) de “una misma” silla o de “tres sillas diferentes”?

Para más referencias críticas sobre el Arte Figurativo de la época, véanse los citados D'Amore y Menna (1974), D'Amore y Speranza (1977), D'Amore (2015); la historia de ese periodo (1970-1990) está excelentemente descrita por Giorgio Di Genova (1993), uno de los principales estudiosos de la historia del Arte.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

D'Amore, B. (2000). “Concetti” e “oggetti” in Matematica. *Rivista di Matematica dell'Università di Parma*, 6(3), 143-151.

D'Amore, B. (2001a). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione “ingenua” in una teoria “realista” vs il modello “antropologico” in una teoria “pragmatica”. *La matematica e la sua didattica*, (1), 4-30.

D'Amore, B. (2001b). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, (2), 150-173.

D'Amore, B. (2001c). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2002). Gérard Vergnaud. *Enciclopedia Pedagogica*. Appendice A-Z. 1508-1509. Brescia: La Scuola Ed.

D'Amore, B. (2003a). La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manquée. *For the learning of mathematics*, 23(1), 47-51.

D'Amore, B. (2015). *Arte e matematica. Metafore, analogie, rappresentazioni, identità fra due mondi possibili*. Bari: Dedalo.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2001). Concepts et objets mathématiques. En: Gagatsis A. (Ed.) (2001). *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology*. Nicosia (Cipro): Intercollege Press Ed. [Actas del "Third Intensive Programme Socrates-Erasmus, Nicosia, Universidad de Cipro, 22 junio - 6 julio 2001. 111-130].

D'Amore, B., & Matteuzzi, M. (1975). *Dal numero alla struttura*. Bologna: Zanichelli.

D'Amore, B., & Menna, F. (1974). *De Mathematica*. Roma: L'Obelisco. [Libro - catálogo de una muestra internacional].

D'Amore, B., & Speranza, F. ed altri (1977). *Alcuni aspetti della critica analitica. Rapporti tra critica analitica e ricerca nelle arti visive*. Bologna: Galleria d'arte moderna. [Actas de un congreso, cuna de la corriente de arte exacto que dio lugar a un gran número de exposiciones].

Di Genova, G. (1993). *Storia dell'arte italiana del '900*. Bologna: Bora.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Science Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Menna. F. (1975). *La linea analitica dell'arte moderna*. Milano: Einaudi.

COMO CITAR — APA

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2024). Consideraciones sobre la relación entre el Arte figurativo y la Matemática. *PARADIGMA*, XLV(1), e2024011. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024011.id1524>.

COMO CITAR — ABNT

D'Amore, Bruno; Fandiño Pinilla, Martha Isabel. Consideraciones sobre la relación entre el Arte figurativo y la Matemática. *PARADIGMA*, Maracay, v. XLV, n. 1, e2024011, Ene./Jun., 2024. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2024.e2024011.id1524>.

HISTÓRICO

Submetido: 26 de junho de 2023.

Aprovado: 09 de Diciembre de 2023.

Publicado: 30 de Enero de 2024.

EDITORES

Fredy E. González 

Luis Andrés Castillo 

ARBITROS

Dos árbitros evaluaron este manuscrito y no autorizaron la publicación de sus nombres